

УДК 517.956

О НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И.Г. Мамедов

(AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9, Институт Кибернетики им. А.И.Гусейнова
НАН Азербайджана, www.cyber.az, e-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru)

Аннотация

В данной статье выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании четырехмерной задачи Гурса для одного дифференциального уравнения со старшей частной производной шестого порядка $D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x)$ с разрывными коэффициентами (L_p -коэффициентами) на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению.

Библ. 24.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, четырехмерная задача Гурса, уравнения с разрывными коэффициентами.

К настоящему времени усилиями многих математиков разнообразные классы трехмерных, четырехмерных, а также многомерных локальных и нелокальных начально-краевых задач для уравнений со старшей частной производной развивались в работах [1]-[9]. Это связано с их появлением в различных задачах прикладного характера [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе обосновывается четырехмерная задача Гурса с неклассическими условиями для одного гиперболического уравнения.

Рассмотрим уравнение:

$$\begin{aligned} (V_{1,1,2,2}u)(x) \equiv & D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x) + a_{1,0,2,2}(x) D_1 D_3^2 D_4^2 u(x) + a_{0,1,2,2}(x) D_2 D_3^2 D_4^2 u(x) + \\ & + a_{1,1,1,2}(x) D_1 D_2 D_3 D_4^2 u(x) + a_{1,1,2,1}(x) D_1 D_2 D_3^2 D_4 u(x) + \\ & + \sum_{\substack{i_1 + i_2 + i_3 + i_4 < 5 \\ i_\xi = \overline{0,1}, \quad \xi = \overline{1,2}; \\ i_\eta = \overline{0,2}, \quad \eta = \overline{3,4}}} a_{i_1, i_2, i_3, i_4}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) = \varphi_{1,1,2,2}(x) \in L_p(G), \quad (1) \end{aligned}$$

здесь $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ искомая функция, определенная на G ; $a_{i_1, i_2, i_3, i_4} = a_{i_1, i_2, i_3, i_4}(x)$ заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$, где $G_\xi = (0, h_\xi)$, $\xi = \overline{1,4}$; $\varphi_{1,1,2,2}(x)$ заданная измеримая функция на G ; $D_\xi = \frac{\partial}{\partial x_\xi}$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева.

Уравнение (1) является гиперболическим уравнением, которое обладает четырьмя действительными характеристиками $x_1 = const$, $x_2 = const$, $x_3 = const$, $x_4 = const$, первая и вторая, из которых простая, а третья и четвертая—двухкратная. Поэтому уравнение (1) в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение [11]–[12]. Уравнения подобного вида возникают при описании многих реальных процессов, происходящих в природе и технике. Подобные ситуации имеют место при изучении процессов распространения тепла [13], влагопереноса в почвогрунтах [14], фильтрации жидкости в пористых средах [15], в задачах математической биологии [16], а также в теории оптимальных процессов [17].

В этой работе уравнение (1) исследовано в общем случае, когда коэффициенты $a_{i_1, i_2, i_3, i_4}(x)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$\begin{aligned} a_{0,0,i_3,i_4}(x) &\in L_p(G), \quad a_{1,0,i_3,i_4}(x) \in L_{\infty,p,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{0,1,i_3,i_4}(x) \in L_{p,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \\ a_{0,0,2,i_4}(x) &\in L_{p,p,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{0,0,i_3,2}(x) \in L_{p,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{1,1,i_3,i_4}(x) \in L_{\infty,\infty,p,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \\ a_{1,0,2,i_4}(x) &\in L_{\infty,p,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{1,0,i_3,2}(x) \in L_{\infty,p,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{0,1,2,i_4}(x) \in L_{p,\infty,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \\ a_{0,1,i_3,2}(x) &\in L_{p,\infty,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{0,0,2,2}(x) \in L_{p,p,\infty,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{1,1,2,i_4}(x) \in L_{\infty,\infty,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \\ a_{1,1,i_3,2}(x) &\in L_{\infty,\infty,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{0,1,2,2}(x) \in L_{p,\infty,\infty,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \quad a_{1,0,1,1}(x) \in L_{\infty,p,\infty,\infty}^{x_1,x_2,x_3,x_4}(G), \end{aligned}$$

где $i_3 = \overline{0, 1}$, $i_4 = \overline{0, 1}$.

При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает, разрывными коэффициентами которые удовлетворяют только некоторым условиям типа p -интегрируемости и ограниченности т.е. рассмотренный псевдопараболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряженного оператора. Иначе говоря, функция Римана для такого уравнения не может быть исследована классическим методом характеристик.

При этих условиях решение $u(x)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С.Л.Соболева

$$W_p^{(1,1,2,2)}(G) \equiv \{u(x) : D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) \in L_p(G), \quad i_\xi = \overline{0, 1}, \xi = \overline{1, 2}; i_\eta = \overline{0, 2}, \eta = \overline{3, 4}\},$$

где $1 \leq p \leq \infty$. Норму в анизотропном пространстве $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u(x)\|_{W_p^{(1,1,2,2)}(G)} = \sum_{\substack{i_\xi = 0 \\ \xi = \overline{1, 2}}}^1 \sum_{\substack{i_\eta = 0 \\ \eta = \overline{3, 4}}}^2 \|D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x)\|_{L_p(G)}.$$

Для уравнения (1) условия Гурса классического вида можно задать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_1, x_2, x_3, x_4)|_{x_1=0} = F(x_2, x_3, x_4); \quad u(x_1, x_2, x_3, x_4)|_{x_2=0} = g(x_1, x_3, x_4); \\ u(x_1, x_2, x_3, x_4)|_{x_3=0} = \psi(x_1, x_2, x_4); \quad \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \Phi(x_1, x_2, x_4); \\ u(x_1, x_2, x_3, x_4)|_{x_4=0} = T(x_1, x_2, x_3); \quad \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \Big|_{x_4=0} = S(x_1, x_2, x_3). \end{array} \right. \quad (2)$$

где $F(x_2, x_3, x_4)$, $g(x_1, x_3, x_4)$, $\psi(x_1, x_2, x_4)$, $\Phi(x_1, x_2, x_4)$, $T(x_1, x_2, x_3)$, $S(x_1, x_2, x_3)$, заданные измеримые функции на G . Очевидно, что в случае условий (2) функций F , g , ψ , Φ , T , S кроме условий

$$F(x_2, x_3, x_4) \in W_p^{(1,2,2)}(G_2 \times G_3 \times G_4), g(x_1, x_3, x_4) \in W_p^{(1,2,2)}(G_1 \times G_3 \times G_4),$$

$$\psi(x_1, x_2, x_4) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_4), \Phi(x_1, x_2, x_4) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_4),$$

$$T(x_1, x_2, x_3) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_3), S(x_1, x_2, x_3) \in W_p^{(1,1,2)}(G_1 \times G_2 \times G_3),$$

должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0, x_3, x_4) = g(0, x_3, x_4); F(x_2, 0, x_4) = \psi(0, x_2, x_4); g_{x_4}(x_1, x_3, 0) = S(x_1, 0, x_3); \\ F(x_2, x_3, 0) = T(0, x_2, x_3); F_{x_3}(x_2, 0, x_4) = \Phi(0, x_2, x_4); F_{x_4}(x_2, x_3, 0) = S(0, x_2, x_3); \\ g(x_1, x_3, 0) = T(x_1, 0, x_3); g(x_1, 0, x_4) = \psi(x_1, 0, x_4); g_{x_3}(x_1, 0, x_4) = \Phi(x_1, 0, x_4); \\ \psi(x_1, x_2, 0) = T(x_1, x_2, 0); \psi_{x_4}(x_1, x_2, 0) = S(x_1, x_2, 0); \Phi_{x_4}(x_1, x_2, 0) = S_{x_3}(x_1, x_2, 0) \end{array} \right. \quad (3)$$

которые являются условиями согласования.

Наличие условий согласования (3) в постановке задачи (1), (2) означает, что условиями (2) задана также некоторая излишняя информация о решении этой задачи. Поэтому возникает вопрос о нахождении краевых условий, которые не содержат излишней информации о решении и не требуют выполнения некоторых дополнительных условий типа согласования. В связи с этим рассмотрим следующие неклассические начально-краевые условия:

$$V_{0,0,i_3,i_4} u \equiv D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(0, 0, 0, 0) = \varphi_{0,0,i_3,i_4} \in R, i_\nu = \overline{0, 1}, \nu = \overline{3, 4};$$

$$(V_{1,0,i_3,i_4} u)(x_1) \equiv D_1 D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x_1, 0, 0, 0) = \varphi_{1,0,i_3,i_4}(x_1) \in L_p(G_1), i_\nu = \overline{0, 1}, \nu = \overline{3, 4};$$

$$(V_{0,1,i_3,i_4} u)(x_2) \equiv D_2 D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(0, x_2, 0, 0) = \varphi_{0,1,i_3,i_4}(x_2) \in L_p(G_2), i_\nu = \overline{0, 1}, \nu = \overline{3, 4};$$

$$(V_{0,0,2,i_4} u)(x_3) \equiv D_3^2 D_4^{i_4} u(0, 0, x_3, 0) = \varphi_{0,0,2,i_4}(x_3) \in L_p(G_3), i_4 = \overline{0, 1};$$

$$(V_{0,0,i_3,2} u)(x_4) \equiv D_3^{i_3} D_4^2 u(0, 0, 0, x_4) = \varphi_{0,0,i_3,2}(x_4) \in L_p(G_4), i_3 = \overline{0, 1};$$

$$(V_{1,1,i_3,i_4} u)(x_1, x_2) \equiv D_1 D_2 D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x_1, x_2, 0, 0) =$$

$$= \varphi_{1,1,i_3,i_4}(x_1, x_2) \in L_p(G_1 \times G_2), i_\nu = \overline{0, 1}, \nu = \overline{3, 4};$$

$$(V_{1,0,2,i_4} u)(x_1, x_3) \equiv D_1 D_3^2 D_4^{i_4} u(x_1, 0, x_3, 0) = \varphi_{1,0,2,i_4}(x_1, x_3) \in L_p(G_1 \times G_3), i_4 = \overline{0, 1};$$

$$(V_{1,0,i_3,2} u)(x_1, x_4) \equiv D_1 D_3^{i_3} D_4^2 u(x_1, 0, 0, x_4) = \varphi_{1,0,i_3,2}(x_1, x_4) \in L_p(G_1 \times G_4), i_3 = \overline{0, 1};$$

$$\begin{aligned}
(V_{0,1,2,i_4}u)(x_2, x_3) &\equiv D_2 D_3^2 D_4^{i_4} u(0, x_2, x_3, 0) = \varphi_{0,1,2,i_4}(x_2, x_3) \in L_p(G_2 \times G_3), i_4 = \overline{0, 1}; \\
(V_{0,1,i_3,2}u)(x_2, x_4) &\equiv D_2 D_3^{i_3} D_4^2 u(0, x_2, 0, x_4) = \varphi_{0,1,i_3,2}(x_2, x_4) \in L_p(G_2 \times G_4), i_3 = \overline{0, 1}; \\
(V_{0,0,2,2}u)(x_3, x_4) &\equiv D_3^2 D_4^2 u(0, 0, x_3, x_4) = \varphi_{0,0,2,2}(x_3, x_4) \in L_p(G_3 \times G_4); \\
(V_{1,1,2,i_4}u)(x_1, x_2, x_3) &\equiv D_1 D_2 D_3^2 D_4^{i_4} u(x_1, x_2, x_3, 0) = \\
&= \varphi_{1,1,2,i_4}(x_1, x_2, x_3) \in L_p(G_1 \times G_2 \times G_3), i_4 = \overline{0, 1}; \\
(V_{1,1,i_3,2}u)(x_1, x_2, x_4) &\equiv D_1 D_2 D_3^{i_3} D_4^2 u(x_1, x_2, 0, x_4) = \\
&= \varphi_{1,1,i_3,2}(x_1, x_2, x_4) \in L_p(G_1 \times G_2 \times G_4), i_3 = \overline{0, 1}; \\
(V_{0,1,2,2}u)(x_2, x_3, x_4) &\equiv D_2 D_3^2 D_4^2 u(0, x_2, x_3, x_4) = \varphi_{0,1,2,2}(x_2, x_3, x_4) \in L_p(G_2 \times G_3 \times G_4); \\
(V_{1,0,2,2}u)(x_1, x_3, x_4) &\equiv D_1 D_3^2 D_4^2 u(x_1, 0, x_3, x_4) = \\
&= \varphi_{1,0,2,2}(x_1, x_3, x_4) \in L_p(G_1 \times G_3 \times G_4); \tag{4}
\end{aligned}$$

Если функция $u \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является решением четырехмерной задачи Гурса классического вида (1), (2), то она является также решением задачи (1), (4) для $\varphi_{i_1, i_2, i_3, i_4}$ определяемых следующими равенствами

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,0,0,0} &= F(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = \psi(0, 0, 0) = T(0, 0, 0); \varphi_{0,0,1,0} = \\
&= \Phi(0, 0, 0) = g_{x_3}(0, 0, 0) = F_{x_3}(0, 0, 0); \\
\varphi_{0,0,0,1} &= S(0, 0, 0) = F_{x_4}(0, 0, 0) = \psi_{x_4}(0, 0, 0); \varphi_{0,0,1,1} = S_{x_3}(0, 0, 0) = \Phi_{x_4}(0, 0, 0); \\
\varphi_{1,0,0,0}(x_1) &= g_{x_1}(x_1, 0, 0) = \psi_{x_1}(x_1, 0, 0) = T_{x_1}(x_1, 0, 0); \varphi_{1,0,1,0}(x_1) = g_{x_1 x_3}(x_1, 0, 0) = \\
&= \Phi_{x_1}(x_1, 0, 0) = T_{x_1 x_3}(x_1, 0, 0); \varphi_{1,0,0,1}(x_1) = g_{x_1 x_4}(x_1, 0, 0) = \psi_{x_1 x_4}(x_1, 0, 0) = \\
&= S_{x_1}(x_1, 0, 0); \varphi_{1,0,1,1}(x_1) = g_{x_1 x_3 x_4}(x_1, 0, 0) = \Phi_{x_1 x_4}(x_1, 0, 0); \varphi_{0,1,0,0}(x_2) = \\
&= F_{x_2}(x_2, 0, 0) = \psi_{x_2}(0, x_2, 0) = T_{x_2}(0, x_2, 0); \varphi_{0,1,1,0}(x_2) = F_{x_2 x_3}(x_2, 0, 0) = \\
&= T_{x_2 x_3}(0, x_2, 0) = \Phi_{x_2}(0, x_2, 0); \varphi_{0,1,0,1}(x_2) = F_{x_2 x_4}(x_2, 0, 0) = \psi_{x_2 x_4}(0, x_2, 0) = \\
&= S_{x_2}(0, x_2, 0); \varphi_{0,1,1,1}(x_2) = F_{x_2 x_3 x_4}(x_2, 0, 0) = S_{x_2 x_3}(0, x_2, 0); \\
\varphi_{0,0,2,0}(x_3) &= F_{x_3 x_3}(0, x_3, 0) = g_{x_3 x_3}(0, x_3, 0) = T_{x_3 x_3}(0, 0, x_3); \\
\varphi_{0,0,2,1}(x_3) &= F_{x_3 x_3 x_4}(0, x_3, 0) = g_{x_3 x_3 x_4}(0, x_3, 0) = S_{x_3 x_3}(0, 0, x_3); \\
\varphi_{0,0,0,2}(x_4) &= F_{x_4 x_4}(0, 0, x_4) = g_{x_4 x_4}(0, 0, x_4) = \psi_{x_4 x_4}(0, 0, x_4); \\
\varphi_{0,0,1,2}(x_4) &= F_{x_3 x_4 x_4}(0, 0, x_4) = g_{x_3 x_4 x_4}(0, 0, x_4) = \Phi_{x_4 x_4}(0, 0, x_4); \\
\varphi_{1,1,0,0}(x_1, x_2) &= \psi_{x_1 x_2}(x_1, x_2, 0) = T_{x_1 x_2}(x_1, x_2, 0); \\
\varphi_{1,1,1,0}(x_1, x_2) &= T_{x_1 x_2 x_3}(x_1, x_2, 0) = \Phi_{x_1 x_2}(x_1, x_2, 0); \\
\varphi_{1,1,0,1}(x_1, x_2) &= \psi_{x_1 x_2 x_4}(x_1, x_2, 0) = S_{x_1 x_2}(x_1, x_2, 0);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,1,1,1}(x_1, x_2) &= \Phi_{x_1 x_2 x_4}(x_1, x_2, 0) = S_{x_1 x_2 x_3}(x_1, x_2, 0); \\
\varphi_{1,0,2,0}(x_1, x_3) &= g_{x_1 x_3 x_3}(x_1, x_3, 0) = T_{x_1 x_3 x_3}(x_1, 0, x_3); \\
\varphi_{1,0,2,1}(x_1, x_3) &= g_{x_1 x_3 x_3 x_4}(x_1, x_3, 0) = S_{x_1 x_3 x_3}(x_1, 0, x_3); \\
\varphi_{1,0,0,2}(x_1, x_4) &= g_{x_1 x_4 x_4}(x_1, 0, x_4) = \psi_{x_1 x_4 x_4}(x_1, 0, x_4); \\
\varphi_{1,0,1,2}(x_1, x_4) &= g_{x_1 x_3 x_4 x_4}(x_1, 0, x_4) = \Phi_{x_1 x_4 x_4}(x_1, 0, x_4); \\
\varphi_{0,1,2,0}(x_2, x_3) &= F_{x_2 x_3 x_3}(x_2, x_3, 0) = T_{x_2 x_3 x_3}(0, x_2, x_3); \\
\varphi_{0,1,2,1}(x_2, x_3) &= F_{x_2 x_3 x_3 x_4}(x_2, x_3, 0) = S_{x_2 x_3 x_3}(0, x_2, x_3); \\
\varphi_{0,1,0,2}(x_2, x_4) &= F_{x_2 x_4 x_4}(x_2, 0, x_4) = \psi_{x_2 x_4 x_4}(0, x_2, x_4); \\
\varphi_{0,1,1,2}(x_2, x_4) &= F_{x_2 x_3 x_4 x_4}(x_2, 0, x_4) = \Phi_{x_2 x_4 x_4}(0, x_2, x_4); \\
\varphi_{0,0,2,2}(x_3, x_4) &= F_{x_3 x_3 x_4 x_4}(0, x_3, x_4) = g_{x_3 x_3 x_4 x_4}(0, x_3, x_4); \varphi_{1,1,2,0}(x_1, x_2, x_3) = \\
&= T_{x_1 x_2 x_3 x_3}(x_1, x_2, x_3); \varphi_{1,1,2,1}(x_1, x_2, x_3) = S_{x_1 x_2 x_3 x_3}(x_1, x_2, x_3); \varphi_{1,1,0,2}(x_1, x_2, x_4) = \\
&= \psi_{x_1 x_2 x_4 x_4}(x_1, x_2, x_4); \varphi_{1,1,1,2}(x_1, x_2, x_4) = \Phi_{x_1 x_2 x_4 x_4}(x_1, x_2, x_4); \\
\varphi_{0,1,2,2}(x_2, x_3, x_4) &= F_{x_2 x_3 x_3 x_4 x_4}(x_2, x_3, x_4); \varphi_{1,0,2,2}(x_1, x_3, x_4) = g_{x_1 x_3 x_3 x_4 x_4}(x_1, x_3, x_4).
\end{aligned}$$

Легко доказать, что верно и обратное. Иначе говоря, если функция $u \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является решением задачи (1), (4), то она является также решением задачи (1), (2), для следующих функций F, g, ψ, Φ, T, S :

$$\begin{aligned}
F(x_2, x_3, x_4) &= \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \varphi_{0,0,i_3,i_4} + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_2} \varphi_{0,1,i_3,i_4}(\xi_2) d\xi_2 + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_3} (x_3 - \xi_3) \varphi_{0,0,2,i_4}(\xi_3) d\xi_3 + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \xi_4) \varphi_{0,0,i_3,2}(\xi_4) d\xi_4 + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \xi_3) \varphi_{0,1,2,i_4}(\xi_2, \xi_3) d\xi_2 d\xi_3 + \\
&+ \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4) \varphi_{0,0,2,2}(\xi_3, \xi_4) d\xi_3 d\xi_4 + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \xi_4) \varphi_{0,1,i_3,2}(\xi_2, \xi_4) d\xi_2 d\xi_4 + \\
&+ \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \xi_3)(x_4 - \xi_4) \varphi_{0,1,2,2}(\xi_2, \xi_3, \xi_4) d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4; \\
g(x_1, x_3, x_4) &= \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \varphi_{0,0,i_3,i_4} + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \varphi_{1,0,i_3,i_4}(\xi_1) d\xi_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_3} (x_3 - \xi_3) \varphi_{0,0,2,i_4}(\xi_3) d\xi_3 + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \xi_4) \varphi_{0,0,i_3,2}(\xi_4) d\xi_4 + \\
& + \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \xi_3) \varphi_{1,0,2,i_4}(\xi_1, \xi_3) d\xi_1 d\xi_3 + \\
& + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \xi_3) (x_4 - \xi_4) \varphi_{0,0,2,2}(\xi_3, \xi_4) d\xi_3 d\xi_4 + \\
& + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} (x_4 - \xi_4) \varphi_{1,0,i_3,2}(\xi_1, \xi_4) d\xi_1 d\xi_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \xi_3) (x_4 - \xi_4) \varphi_{1,0,2,2}(\xi_1, \xi_3, \xi_4) d\xi_1 d\xi_3 d\xi_4;
\end{aligned}$$

$$\psi(x_1, x_2, x_4) = M_0(x_1, x_2, x_4), \quad \Phi(x_1, x_2, x_4) = M_1(x_1, x_2, x_4), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
M_k(x_1, x_2, x_4) = & \varphi_{0,0,k,0} + x_4 \varphi_{0,0,k,1} + \int_0^{x_1} \varphi_{1,0,k,0}(\tau_1) d\tau_1 + x_4 \int_0^{x_1} \varphi_{1,0,k,1}(\tau_1) d\tau_1 + \\
& + \int_0^{x_2} \varphi_{0,1,k,0}(\tau_2) d\tau_2 + x_4 \int_0^{x_2} \varphi_{0,1,k,1}(\tau_2) d\tau_2 + \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{0,0,k,2}(\tau_4) d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_{1,1,k,0}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + x_4 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_{1,1,k,1}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{0,1,k,2}(\tau_2, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{1,0,k,2}(\tau_1, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{1,1,k,2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4, \quad k = \overline{0, 1};
\end{aligned}$$

$$T(x_1, x_2, x_3) = L_0(x_1, x_2, x_3), \quad S(x_1, x_2, x_3) = L_1(x_1, x_2, x_3), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
L_k(x_1, x_2, x_3) = & \varphi_{0,0,0,k} + x_3 \varphi_{0,0,1,k} + \int_0^{x_1} \varphi_{1,0,0,k}(\eta_1) d\eta_1 + \\
& + x_3 \int_0^{x_1} \varphi_{1,0,1,k}(\eta_1) d\eta_1 + \int_0^{x_2} \varphi_{0,1,0,k}(\eta_2) d\eta_2 + \\
& + x_3 \int_0^{x_2} \varphi_{0,1,1,k}(\eta_2) d\eta_2 + \int_0^{x_3} (x_3 - \eta_3) \varphi_{0,0,2,k}(\eta_3) d\eta_3 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_{1,1,0,k}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + \\
& + x_3 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_{1,1,1,k}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \eta_3) \varphi_{0,1,2,k}(\eta_2, \eta_3) d\eta_2 d\eta_3 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \eta_3) \varphi_{1,0,2,k}(\eta_1, \eta_3) d\eta_1 d\eta_3 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \eta_3) \varphi_{1,1,2,k}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad k = \overline{0, 1}.
\end{aligned}$$

Итак, четырехмерной задачи Гурса классического вида (1), (2) и вида (1), (4) в общем случае эквивалентны. Однако четырехмерная задача Гурса (1), (4) по постановке более естественна, чем задача (1), (2). Это связано с тем, что в постановке задачи (1), (4) на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуется. Поэтому задачу (1), (4) можно рассматривать как задачу Гурса с неклассическими условиями.

2. НЕКОТОРЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА С.Л.СОВОЛЕВА $W_p^{1,1,2,2}(G)$ И ОПЕРАТОРНЫЙ ВИД ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГУРСА

Задачу (1), (4) мы будем исследовать методом операторных уравнений и при этом будем следовать схемы работы [18]. Предварительно задачу (1), (4) запишем в виде операторного уравнения

$$Vu = \varphi, \quad (5)$$

где V есть векторный оператор, определяемый посредством равенства

$$\begin{aligned} V = & (V_{1,1,2,2}, V_{0,0,0,0}, V_{0,0,1,0}, V_{0,0,0,1}, V_{0,0,1,1}, V_{1,0,0,0}, V_{1,0,1,0}, V_{1,0,0,1}, V_{1,0,1,1}, V_{0,1,0,0}, V_{0,1,1,0}, \\ & V_{0,1,0,1}, V_{0,1,1,1}, V_{0,0,2,0}, V_{0,0,2,1}, V_{0,0,0,2}, V_{0,0,1,2}, V_{1,1,0,0}, V_{1,1,1,0}, V_{1,1,0,1}, V_{1,1,1,1}, V_{1,0,2,0}, V_{1,0,2,1}, \\ & V_{1,0,0,2}, V_{1,0,1,2}, V_{0,1,2,0}, V_{0,1,2,1}, V_{0,1,0,2}, V_{0,1,1,2}, V_{0,0,2,2}, V_{1,1,2,0}, V_{1,1,2,1}, V_{1,1,0,2}, V_{1,1,1,2}, \\ & V_{0,1,2,2}, V_{1,0,2,2}) : W_p^{(1,1,2,2)}(G) \rightarrow E_p^{(1,1,2,2)} \end{aligned}$$

$$\varphi = (\varphi_{1,1,2,2}, \varphi_{0,0,0,0}, \varphi_{0,0,1,0}, \varphi_{0,0,0,1}, \varphi_{0,0,1,1}, \varphi_{1,0,0,0}, \varphi_{1,0,1,0}, \varphi_{1,0,0,1}, \varphi_{1,0,1,1}, \varphi_{0,1,0,0},$$

$$\varphi_{0,1,1,0}, \varphi_{0,1,0,1}, \varphi_{0,1,1,1}, \varphi_{0,0,2,0}, \varphi_{0,0,2,1}, \varphi_{0,0,0,2}, \varphi_{0,0,1,2}, \varphi_{1,1,0,0}, \varphi_{1,1,1,0}, \varphi_{1,1,0,1}, \varphi_{1,1,1,1},$$

$$\varphi_{1,0,2,0}, \varphi_{1,0,2,1}, \varphi_{1,0,0,2}, \varphi_{1,0,1,2}, \varphi_{0,1,2,0}, \varphi_{0,1,2,1}, \varphi_{0,1,0,2}, \varphi_{0,1,1,2}, \varphi_{0,0,2,2}, \varphi_{1,1,2,0},$$

$$\varphi_{1,1,2,1}, \varphi_{1,1,0,2}, \varphi_{1,1,1,2}, \varphi_{0,1,2,2}, \varphi_{1,0,2,2})$$

из пространства

$$\begin{aligned} E_p^{(1,1,2,2)} \equiv & L_p(G) \times R \times R \times R \times R \times L_p(G_1) \times L_p(G_1) \times L_p(G_1) \times L_p(G_1) \times \\ & \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_3) \times L_p(G_3) \times L_p(G_4) \times L_p(G_4) \times \\ & \times L_p(G_1 \times G_2) \times L_p(G_1 \times G_2) \times L_p(G_1 \times G_2) \times L_p(G_1 \times G_2) \times L_p(G_1 \times G_3) \times \\ & \times L_p(G_1 \times G_3) \times L_p(G_1 \times G_4) \times L_p(G_1 \times G_4) \times L_p(G_2 \times G_3) \times \\ & \times L_p(G_2 \times G_3) \times L_p(G_2 \times G_4) \times L_p(G_2 \times G_4) \times L_p(G_3 \times G_4) \times L_p(G_1 \times G_2 \times G_3) \times \\ & \times L_p(G_1 \times G_2 \times G_3) \times L_p(G_1 \times G_2 \times G_4) \times \\ & \times L_p(G_1 \times G_2 \times G_4) \times L_p(G_2 \times G_3 \times G_4) \times L_p(G_1 \times G_3 \times G_4). \end{aligned}$$

Заметим, что в пространстве $E_p^{(1,1,2,2)}$ норму будем определять естественным образом, при помощи равенства

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{E_p^{(1,1,2,2)}} &= \|\varphi_{1,1,2,2}\|_{L_p(G)} + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{0,0,i_3,i_4}\|_R + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{1,0,i_3,i_4}\|_{L_p(G_1)} + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{0,1,i_3,i_4}\|_{L_p(G_2)} + \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{0,0,2,i_4}\|_{L_p(G_3)} + \sum_{i_3=0}^1 \|\varphi_{0,0,i_3,2}\|_{L_p(G_4)} + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{1,1,i_3,i_4}\|_{L_p(G_1 \times G_2)} + \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{1,0,2,i_4}\|_{L_p(G_1 \times G_3)} + \sum_{i_3=0}^1 \|\varphi_{1,0,i_3,2}\|_{L_p(G_1 \times G_4)} + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{0,1,2,i_4}\|_{L_p(G_2 \times G_3)} + \sum_{i_3=0}^1 \|\varphi_{0,1,i_3,2}\|_{L_p(G_2 \times G_4)} + \\
&+ \|\varphi_{0,0,2,2}\|_{L_p(G_3 \times G_4)} + \sum_{i_4=0}^1 \|\varphi_{1,1,2,i_4}\|_{L_p(G_1 \times G_2 \times G_3)} + \sum_{i_3=0}^1 \|\varphi_{1,1,i_3,2}\|_{L_p(G_1 \times G_2 \times G_4)} + \\
&+ \|\varphi_{0,1,2,2}\|_{L_p(G_2 \times G_3 \times G_4)} + \|\varphi_{1,0,2,2}\|_{L_p(G_1 \times G_3 \times G_4)}.
\end{aligned}$$

Задачу (1), (4) будем исследовать при помощи интегральных представлений специального вида для функций $u(x) \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ в виде [19]

$$\begin{aligned}
u(x) &= (Qb)(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} b_{0,0,i_3,i_4} + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_1} b_{1,0,i_3,i_4}(\tau_1) d\tau_1 + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_2} b_{0,1,i_3,i_4}(\tau_2) d\tau_2 + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) b_{0,0,2,i_4}(\tau_3) d\tau_3 + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) b_{0,0,i_3,2}(\tau_4) d\tau_4 + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} b_{1,1,i_3,i_4}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) b_{1,0,2,i_4}(\tau_1, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) b_{1,0,i_3,2}(\tau_1, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) b_{0,1,2,i_4}(\tau_2, \tau_3) d\tau_2 d\tau_3 + \\
& + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) b_{0,1,i_3,2}(\tau_2, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b_{0,0,2,2}(\tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) b_{1,1,2,i_4}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
& + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) b_{1,1,i_3,2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b_{0,1,2,2}(\tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b_{1,0,2,2}(\tau_1, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b_{1,1,2,2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4, \tag{6}
\end{aligned}$$

посредством единственного элемента

$$\begin{aligned}
b = & (b_{1,1,2,2}, b_{0,0,0,0}, b_{0,0,1,0}, b_{0,0,0,1}, b_{0,0,1,1}, b_{1,0,0,0}, b_{1,0,1,0}, b_{1,0,0,1}, b_{1,0,1,1}, b_{0,1,0,0}, b_{0,1,1,0}, b_{0,1,0,1}, \\
& b_{0,1,1,1}, b_{0,0,2,0}, b_{0,0,2,1}, b_{0,0,0,2}, b_{0,0,1,2}, b_{1,1,0,0}, b_{1,1,1,0}, b_{1,1,0,1}, b_{1,1,1,1}, b_{1,0,2,0}, b_{1,0,2,1}, b_{1,0,0,2}, b_{1,0,1,2}, \\
& b_{0,1,2,0}, b_{0,1,2,1}, b_{0,1,0,2}, b_{0,1,1,2}, b_{0,0,2,2}, b_{1,1,2,0}, b_{1,1,2,1}, b_{1,1,0,2}, b_{1,1,1,2}, b_{0,1,2,2}, b_{1,0,2,2}) \in E_p^{(1,1,2,2)}.
\end{aligned}$$

При этом существуют положительные постоянные M_1^0 и M_2^0 такие, что

$$M_1^0 \|b\|_{E_p^{(1,1,2,2)}} \leq \|(Qb)(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_{W_p^{(1,1,2,2)}(G)} \leq M_2^0 \|b\|_{E_p^{(1,1,2,2)}}, \tag{7}$$

для любой $b \in E_p^{(1,1,2,2)}$.

Очевидно, что оператор $Q : E_p^{(1,1,2,2)} \rightarrow W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ является линейным ограниченным оператором. Неравенство (7) показывает, что оператор Q имеет также ограниченный обратный оператор определенную на пространстве $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$. Следовательно, оператор Q задает гомеоморфизм между банаховыми пространствами $E_p^{(1,1,2,2)}$ и $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$. Поэтому решение уравнения (5) эквивалентно решению уравнения

$$VQb = \varphi. \tag{8}$$

Уравнение (8) будем называть каноническим видом уравнения (5).

Кроме того, формула (6) показывает, что любая функция $u \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ имеет следы:

$$\begin{aligned}
& u(0,0,0,0), D_3u(0,0,0,0), D_4u(0,0,0,0), D_3D_4u(0,0,0,0), D_1u(x_1,0,0,0), \\
& D_1D_3u(x_1,0,0,0), D_1D_4u(x_1,0,0,0), D_1D_3D_4u(x_1,0,0,0), D_2u(0,x_2,0,0), \\
& D_2D_3u(0,x_2,0,0), D_2D_4u(0,x_2,0,0), D_2D_3D_4u(0,x_2,0,0), D_3^2u(0,0,x_3,0), \\
& D_3^2D_4u(0,0,x_3,0), D_4^2u(0,0,0,x_4), D_3D_4^2u(0,0,0,x_4), D_1D_2u(x_1,x_2,0,0), \\
& D_1D_2D_3u(x_1,x_2,0,0), D_1D_2D_4u(x_1,x_2,0,0), D_1D_2D_3D_4u(x_1,x_2,0,0), \\
& D_1D_3^2u(x_1,0,x_3,0), D_1D_3^2D_4u(x_1,0,x_3,0), D_1D_4^2u(x_1,0,0,x_4), \\
& D_1D_3D_4^2u(x_1,0,0,x_4), D_2D_3^2u(0,x_2,x_3,0), D_2D_3^2D_4u(0,x_2,x_3,0), \\
& D_2D_4^2u(0,x_2,0,x_4), D_2D_3D_4^2u(0,x_2,0,x_4), D_3^2D_4^2u(0,0,x_3,x_4), \\
& D_1D_2D_3^2u(x_1,x_2,x_3,0), D_1D_2D_3^2D_4u(x_1,x_2,x_3,0), D_1D_2D_4^2u(x_1,x_2,0,x_4), \\
& D_1D_2D_3D_4^2u(x_1,x_2,0,x_4), D_2D_3^2D_4^2u(0,x_2,x_3,x_4), D_1D_3^2D_4^2u(x_1,0,x_3,x_4)
\end{aligned}$$

и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ в

$$\begin{aligned}
& R, R, R, R, L_p(G_1), L_p(G_1), L_p(G_1), L_p(G_1), L_p(G_2), L_p(G_2), L_p(G_2), L_p(G_2), \\
& L_p(G_3), L_p(G_3), L_p(G_4), L_p(G_4), L_p(G_1 \times G_2), L_p(G_1 \times G_2), L_p(G_1 \times G_2), \\
& L_p(G_1 \times G_2), L_p(G_1 \times G_3), L_p(G_1 \times G_3), L_p(G_1 \times G_4), L_p(G_1 \times G_4), \\
& L_p(G_2 \times G_3), L_p(G_2 \times G_3), L_p(G_2 \times G_4), L_p(G_2 \times G_4), L_p(G_3 \times G_4), \\
& L_p(G_1 \times G_2 \times G_3), L_p(G_1 \times G_2 \times G_3), L_p(G_1 \times G_2 \times G_4), \\
& L_p(G_1 \times G_2 \times G_4), L_p(G_2 \times G_3 \times G_4), L_p(G_1 \times G_3 \times G_4)
\end{aligned}$$

соответственно. Далее для этих следов справедливы также равенства:

$$\begin{aligned}
& u(0,0,0,0) = b_{0,0,0,0}; D_3u(0,0,0,0) = b_{0,0,1,0}; D_4u(0,0,0,0) = b_{0,0,0,1}; \\
& D_3D_4u(0,0,0,0) = b_{0,0,1,1}; D_1u(x_1,0,0,0) = b_{1,0,0,0}(x_1); D_1D_3u(x_1,0,0,0) = b_{1,0,1,0}(x_1); \\
& D_1D_4u(x_1,0,0,0) = b_{1,0,0,1}(x_1); D_1D_3D_4u(x_1,0,0,0) = b_{1,0,1,1}(x_1); \\
& D_2u(0,x_2,0,0) = b_{0,1,0,0}(x_2); D_2D_3u(0,x_2,0,0) = b_{0,1,1,0}(x_2); \\
& D_2D_4u(0,x_2,0,0) = b_{0,1,0,1}(x_2); D_2D_3D_4u(0,x_2,0,0) = b_{0,1,1,1}(x_2); \\
& D_3^2u(0,0,x_3,0) = b_{0,0,2,0}(x_3); D_3^2D_4u(0,0,x_3,0) = b_{0,0,2,1}(x_3); \\
& D_4^2u(0,0,0,x_4) = b_{0,0,0,2}(x_4); D_3D_4^2u(0,0,0,x_4) = b_{0,0,1,2}(x_4); \\
& D_1D_2u(x_1,x_2,0,0) = b_{1,1,0,0}(x_1,x_2); D_1D_2D_3u(x_1,x_2,0,0) = b_{1,1,1,0}(x_1,x_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 D_4 u(x_1, x_2, 0, 0) &= b_{1,1,0,1}(x_1, x_2); D_1 D_2 D_3 D_4 u(x_1, x_2, 0, 0) = b_{1,1,1,1}(x_1, x_2); \\
D_1 D_3^2 u(x_1, 0, x_3, 0) &= b_{1,0,2,0}(x_1, x_3); D_1 D_3^2 D_4 u(x_1, 0, x_3, 0) = b_{1,0,2,1}(x_1, x_3); \\
D_1 D_4^2 u(x_1, 0, 0, x_4) &= b_{1,0,0,2}(x_1, x_4); D_1 D_3 D_4^2 u(x_1, 0, 0, x_4) = b_{1,0,1,2}(x_1, x_4); \\
D_2 D_3^2 u(0, x_2, x_3, 0) &= b_{0,1,2,0}(x_2, x_3); D_2 D_3^2 D_4 u(0, x_2, x_3, 0) = b_{0,1,2,1}(x_2, x_3); \\
D_2 D_4^2 u(0, x_2, 0, x_4) &= b_{0,1,0,2}(x_2, x_4); D_2 D_3 D_4^2 u(0, x_2, 0, x_4) = b_{0,1,1,2}(x_2, x_4); \\
D_3^2 D_4^2 u(0, 0, x_3, x_4) &= b_{0,0,2,2}(x_3, x_4); D_1 D_2 D_3^2 u(x_1, x_2, x_3, 0) = b_{1,1,2,0}(x_1, x_2, x_3); \\
D_1 D_2 D_3^2 D_4 u(x_1, x_2, x_3, 0) &= b_{1,1,2,1}(x_1, x_2, x_3); D_1 D_2 D_4^2 u(x_1, x_2, 0, x_4) = b_{1,1,0,2}(x_1, x_2, x_4); \\
D_1 D_2 D_3 D_4^2 u(x_1, x_2, 0, x_4) &= b_{1,1,1,2}(x_1, x_2, x_4); D_2 D_3^2 D_4^2 u(0, x_2, x_3, x_4) = b_{0,1,2,2}(x_2, x_3, x_4); \\
D_1 D_3^2 D_4^2 u(x_1, 0, x_3, x_4) &= b_{1,0,2,2}(x_1, x_3, x_4).
\end{aligned}$$

3. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Задачу (1), (4) мы будем изучать при помощи интегрального представления (6) функций $u \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$. Формула (6) показывает, что функция $u \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$, удовлетворяющая условиям (4), имеет вид:

$$u(x) = g_0(x) + \iiint_G R_0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4; x_1, x_2, x_3, x_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4,$$

где

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \varphi_{0,0,i_3,i_4} + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \varphi_{1,0,i_3,i_4}(\tau_1) d\tau_1 + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_2} \varphi_{0,1,i_3,i_4}(\tau_2) d\tau_2 + \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{0,0,2,i_4}(\tau_3) d\tau_3 + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{0,0,i_3,2}(\tau_4) d\tau_4 + \sum_{i_3=0}^1 \sum_{i_4=0}^1 x_3^{i_3} x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_{1,1,i_3,i_4}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{1,0,2,i_4}(\tau_1, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\
&+ \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{1,0,i_3,2}(\tau_1, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4 + \\
&+ \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{0,1,2,i_4}(\tau_2, \tau_3) d\tau_2 d\tau_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{0,1,i_3,2}(\tau_2, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) \varphi_{0,0,2,2}(\tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \sum_{i_4=0}^1 x_4^{i_4} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) \varphi_{1,1,2,i_4}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
& + \sum_{i_3=0}^1 x_3^{i_3} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) \varphi_{1,1,i_3,2}(\tau_1, \tau_2, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) \varphi_{0,1,2,2}(\tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) \varphi_{1,0,2,2}(\tau_1, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4
\end{aligned}$$

и

$$R_0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) \prod_{i=1}^4 \theta(x_i - \tau_i),$$

причем $\theta(\xi)$ является функцией Хевисайда на R , т.е.

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Тогда после замены $u = g_0 + \hat{u}$, где

$$\hat{u}(x) = \iiint\limits_G R_0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4; x_1, x_2, x_3, x_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$(V_{1,1,2,2} \hat{u})(x) = \hat{Z}(x), \quad (9)$$

где

$$\hat{Z}(x) = \varphi_{1,1,2,2} - V_{1,1,2,2} g_0.$$

Производные функции \hat{u} можно вычислить посредством равенств

$$D_1 \hat{u}(x) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4,$$

$$D_1 D_3 \hat{u}(x) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4,$$

$$\begin{aligned}
D_1 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_1 D_3 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_2 D_3 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_2 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_2 D_3 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_3^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4, \\
D_3^2 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4, \\
D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\
D_3 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\
D_1 D_2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4, \\
D_1 D_2 D_3 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4, \\
D_1 D_2 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4, \\
D_1 D_2 D_3 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4, \\
D_1 D_3^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4, \\
D_1 D_3^2 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4, \\
D_1 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_2 d\tau_3, \\
D_1 D_3 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_2 d\tau_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 D_3^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4, \\
D_2 D_3^2 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4, \\
D_2 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_3, \\
D_2 D_3 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_3, \\
D_3 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_3 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4, \\
D_3^2 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, \tau_2, x_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2, \\
D_1 D_2 D_3^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_4} (x_4 - \tau_4) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_4, \\
D_1 D_2 D_3^2 D_4 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_4} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_4, \\
D_1 D_2 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_3} (x_3 - \tau_3) D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_3, \\
D_1 D_2 D_3 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_3} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_3, \\
D_2 D_3^2 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_1} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(\tau_1, x_2, x_3, x_4) d\tau_1, \\
D_1 D_3^2 D_4^2 \hat{u}(x) &= \int_0^{x_2} D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, \tau_2, x_3, x_4) d\tau_2, \\
D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 \hat{u}(x) &= D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned}$$

Теперь доминирующую производную рассмотрим как неизвестную функцию, иначе говоря, произведем замену

$$D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x_1, x_2, x_3, x_4) = b(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Тогда уравнение (9) можно записать в виде:

$$(Nb)(x) \equiv b(x_1, x_2, x_3, x_4) + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,0,0,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times R_0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4; x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,0,1,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,0,0,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,0,1,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,0,0,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,0,1,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,0,0,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad \quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,0,1,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,1,0,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,1,1,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,1,0,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{0,1,1,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} a_{0,0,2,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(\tau_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} a_{0,0,2,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} a_{0,0,0,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} a_{0,0,1,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
& + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,1,0,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) (x_4 - \tau_4) b(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,1,1,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,1,0,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} a_{1,1,1,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, x_2, \tau_3, \tau_4) d\tau_3 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} a_{1,0,2,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(x_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_4} a_{1,0,2,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, \tau_2, x_3, \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} a_{1,0,0,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(x_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_2 d\tau_3 + \\
& \quad + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} a_{1,0,1,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, \tau_2, \tau_3, x_4) d\tau_2 d\tau_3 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} a_{0,1,2,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(\tau_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_4} a_{0,1,2,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_1 d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} a_{0,1,0,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(\tau_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_3 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} a_{0,1,1,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_1 d\tau_3 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} a_{0,0,2,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, \tau_2, x_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_0^{x_4} a_{1,1,2,0}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_4 - \tau_4) b(x_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_4 + \\
& \quad + \int_0^{x_4} a_{1,1,2,1}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, x_2, x_3, \tau_4) d\tau_4 + \\
& + \int_0^{x_3} a_{1,1,0,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) (x_3 - \tau_3) b(x_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_3 + \\
& \quad + \int_0^{x_3} a_{1,1,1,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, x_2, \tau_3, x_4) d\tau_3 + \\
& \quad + \int_0^{x_1} a_{0,1,2,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(\tau_1, x_2, x_3, x_4) d\tau_1 + \\
& + \int_0^{x_2} a_{1,0,2,2}(x_1, x_2, x_3, x_4) b(x_1, \tau_2, x_3, x_4) d\tau_2 = \hat{Z}(x), \quad x \in G \tag{10}
\end{aligned}$$

Оператор N уравнения (10) линеен. Используя условия наложенные на коэффициенты a_{i_1, i_2, i_3, i_4} , можно доказать, что этот оператор является ограниченным оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Определение. Если задача (1), (4) для любого

$$\begin{aligned} \varphi = & (\varphi_{1,1,2,2}, \varphi_{0,0,0,0}, \varphi_{0,0,1,0}, \varphi_{0,0,0,1}, \varphi_{0,0,1,1}, \varphi_{1,0,0,0}, \varphi_{1,0,1,0}, \varphi_{1,0,0,1}, \varphi_{1,0,1,1}, \varphi_{0,1,0,0}, \varphi_{0,1,1,0}, \\ & \varphi_{0,1,0,1}, \varphi_{0,1,1,1}, \varphi_{0,0,2,0}, \varphi_{0,0,2,1}, \varphi_{0,0,0,2}, \varphi_{0,0,1,2}, \varphi_{1,1,0,0}, \varphi_{1,1,1,0}, \varphi_{1,1,0,1}, \varphi_{1,1,1,1}, \varphi_{1,0,2,0}, \varphi_{1,0,2,1}, \\ & \varphi_{1,0,0,2}, \varphi_{1,0,1,2}, \varphi_{0,1,2,0}, \varphi_{0,1,2,1}, \varphi_{0,1,0,2}, \varphi_{0,1,1,2}, \varphi_{0,0,2,2}, \varphi_{1,1,2,0}, \varphi_{1,1,2,1}, \\ & \varphi_{1,1,0,2}, \varphi_{1,1,1,2}, \varphi_{0,1,2,2}, \varphi_{1,0,2,2}) \in E_p^{(1,1,2,2)} \end{aligned}$$

имеет единственное решение $u \in W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ такое, что

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,2,2)}(G)} \leq M_1 \|\varphi\|_{E_p^{(1,1,2,2)}},$$

то будем говорить, что оператор V задачи (1), (4) (или уравнения (5)) задает гомеоморфизм из $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ на $E_p^{(1,1,2,2)}$ или задача (1), (4) везде корректно разрешима. Здесь M_1 постоянная не зависящее от φ .

Очевидно, что, если оператор V задачи (1), (4) задает гомеоморфизм из $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ на $E_p^{(1,1,2,2)}$, то существует ограниченный обратный оператор $V^{-1} : E_p^{(1,1,2,2)} \rightarrow W_p^{(1,1,2,2)}(G)$.

В современной теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач, операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. Такие гомеоморфизмы выявлены в работах Ю.М.Березанского и Я.А.Ройтберга [20], Н.В.Житарашу [21], С.С.Ахиева [22], И.Г.Мамедова [23] и др. для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными.

Оператор N является вольтерровым оператором относительно точки $(0, 0, 0, 0)$. Это означает, что если функции $b_1, b_2 \in L_p(G)$ в области

$$G_{(x_1, x_2, x_3, x_4)} = (0, x_1) \times (0, x_2) \times (0, x_3) \times (0, x_4)$$

удовлетворяют условию

$$b_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = b_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4),$$

то выполняется также условие

$$(Nb_1)(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = (Nb_2)(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$$

почти для всех $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \in G_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}$, где $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in G$ произвольная точка.

Используя вольтерровость оператора N , при помощи, например, метода последовательных приближений можно доказать, что уравнение (10) для любой правой части $\hat{Z} \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b \in L_p(G)$, где $1 \leq p \leq \infty$ и это решение удовлетворяет условию

$$\|b\|_{L_p(G)} \leq M_2 \|\hat{Z}\|_{L_p(G)},$$

где M_2 постоянное не зависящее от \hat{Z} . Далее, очевидно, что если $\varphi_{1,1,2,2} \in L_p(G)$, то $\hat{Z} \in L_p(G)$. Кроме того, если $b \in L_p(G)$ есть решение уравнения (10), то решение задачи (1), (4) можно найти при помощи равенства

$$u(x) = g_0(x) + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \int_0^{x_4} b(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) R_0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4; x_1, x_2, x_3, x_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4.$$

Поэтому справедлива

Теорема. Оператор задачи (1), (4) задает гомеоморфизм из $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ на $E_p^{(1,1,2,2)}$.

4. ВЫВОДЫ

Постановка задачи (1), (4) обладает рядом преимуществ:

- 1) в этой постановке не требуется никаких дополнительных условий согласования;
- 2) именно, такая постановка порождает гомеоморфизм между двумя банаховыми пространствами $W_p^{1,1,2,2}(G)$ и $E_p^{1,1,2,2}$;
- 3) эту задачу можно рассматривать как задачу сформулированную по следам в пространстве С.Л.Соболева $W_p^{1,1,2,2}(G)$;
- 4) в этой постановке рассматриваемое уравнение является обобщением многих модельных уравнений некоторых процессов (например, уравнения влагопереноса, уравнения теплопроводности, уравнения Аллера, уравнения Буссинеска-Лява, уравнения Манжерона, трехмерного телеграфного уравнения и т.д.).

Отметим, что применяя методику, приводимую в статье [24], доказывается интегральное представление решения задачи (1), (4) используя понятия фундаментального решения.

Список литературы

- [1] Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве* // Дифференциальные уравнения, 1996. –Т. 32, №10. –С. 1429–1430.
- [2] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. Казань: Казанское математическое общество. 2001. –226 с.
- [3] Миронов А.Н. *К задаче Коши в четырехмерном пространстве* // Дифференциальные уравнения, 2004. –Т. 40, №6. –С. 844–847.
- [4] Миронов А.Н. *К методу Римана решения одной смешанной задачи* // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки, 2007. –№2 (15). –С. 27–32.
- [5] Кощеева О.А. *О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве* // Известия вузов. Математика., 2008. – №9. – С. 40–46.
- [6] Уткина Е.А. *Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве* // Известия вузов. Математика., 2009. – №4. – С. 50–55.

- [7] Миронов А.Н. *О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка* // Дифференциальные уравнения, 2010. –Т. 46, №2. –С. 266–272.
- [8] Джохадзе О.М. *О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения вольтерры первого рода* // Дифференциальные уравнения. –2006. –Т.42, №3. – С. 385-394.
- [9] Midodashvili B. Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, 2005. – v.138. – PP. 43-54.
- [10] Березин А.В., Воронцов А.С., Марков М.Б., Плющенко Б. Д. *О выводе и решении уравнений Максвелла в задачах с заданным волновым фронтом* // Институт приклад. математики им. М.В.Келдыша РАН, Матем. моделирование. 2006. –Т.18, №4. – С. 43-60.
- [11] Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. 1999. –№10. – С. 73-76.
- [12] Мамедов И.Г. *Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка* // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. –2009. –Т.49, №1. – С. 99-110.
- [13] Кожанов А.И. *Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера* // Дифференциальные уравнения. –2004. –Т.40, №6. – С. 763-764.
- [14] Водахова В.А. *Краевая задача с нелокальным условием А.М.Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса* // Дифференциальные уравнения. –1982. –Т.18, №2. – С. 280-285.
- [15] Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференциальные уравнения. –1982. –Т.18, №4. – С. 689-699.
- [16] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*. –М.: Высш. шк., 1995. – 301С.
- [17] Мамедов И.Г. *Условия оптимальности некоторых процессов, описываемых псевдопараболическим уравнением при нелокальных краевых условиях* // Сбор. Математическое и компьютерное моделирование, серия физ.-мат. науки, Каменец-Подольский Национальный Университет, Институт Кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины. – 2008. –С. 133–141.

- [18] Мамедов И.Г. *Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева* // Известия вузов. Математика. – 2011. №2. –С.54-64.
- [19] Мамедов И.Г. *Об одном новом четырехмерном интегральном представлении функций в анизотропном пространстве С.Л.Соболева с доминирующей смешанной производной* // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3. Самара. – 2010. – С. 164–167.
- [20] Березанский Ю.М., Ройтберг Я.А. *Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач* // Укр. мат. жур. –1967. –Т.19, №5. –С. 3–32.
- [21] Житарашу Н.В. *Теорема о полном наборе изоморфизмов в L_2 -теории модельных начальных параболических краевых задач* // Математические исследования, Кишинев. –1986, №88. –С. 40–59.
- [22] Ахиев С.С. *Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления* // ДАН СССР, –1983. Т. 271, №2. –С. 265-269.
- [23] Mamedov I.G. *The local boundary value problem for an integro-differential equation* // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. –2002. –V. XVII. –P. 96-101.
- [24] Мамедов И.Г. *Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами* // Владикавказский математический журнал. – 2010. – Т. 12. –вып. 1. –С.17-32.

Сведения об авторе

Мамедов Ильгар Гурбат оглы

Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9,

Институт Кибернетики НАН Азербайджана, www.cyber.az.

Тел.: (99412) 539 28 26,

Факс.: (99412) 539 28 26,

e-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru.

Должность: ведущий научный сотрудник.

Ученая степень: кандидат физико-математических наук.

Уч. звание: доцент.